数理解析研究所講究録
1483 巻 2006 年 210-221

ある可積分な高次元 KdV 方程式について

富山県立大学・工学部　戸田 晃一 (Kouichi TODA) *
Faculty of Engineering,
Toyama Prefectural University

概要

可積分な高次元 KdV 方程式の一つである Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 と そのソリトン解の振る舞いを紹介する.

1 可積分な浅水波のモデル方程式

ソリトン方程式に代表される無限次元可積分系において, 一般には (少なくとも無限次元可積分系研究者の間では) 以下の性質;

1. **線形化可能な時**
2. **逆散乱法で解ける時**
3. **Lax 対の存在**
4. **Liouville-Arnold の意味での「可積分性」**
5. **無限個の保存量・対称性の存在**
6. **bi-Hamilton 構造**
7. **厳密解の存在**
8. **Bäcklund 変換の存在**
9. **Painlevé 性 (または Painlevé 判定法をパスする時)**

のどれか一つでも持てば「可積分」(の候補) であると考えられている [1, 2, 3, 4, 5]. これまでに様々な観点よりソリトン方程式が多くみつかっているが, 以下では, 浅水波に関連するソリトン方程式に限定して紹介する.

可積分な浅水波のモデル方程式といえば, Korteweg-de Vries (KdV) 方程式 [6] ($u = u(x,t)$):

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0 \tag{1}$$

*kouichi@yukawa.kyoto-u.ac.jp

が有名である[1]．また最近は，Fokas-Fuchssteiner-Camassa-Holm (FFCH) 方程式 [7, 8, 9, 10]： $u = u(x,t)$,

$$u_t + 2\kappa u_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{2}$$

が話題となることも多い[2]．ここで，κ は任意の定数である．（付録 A を参照してほしい．）

この他に浅水波方程式という名前が付いているソリトン方程式[3] としては，以下の方程式（$u = u(x,t)$）：

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxt} + uu_t - \frac{1}{2}u_x \int_x^\infty u_t(s,t)ds = 0, \tag{3}$$

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxt} + uu_t - u_x \int_x^\infty u_t(s,t)ds = 0 \tag{4}$$

がある．前者は Ablowitz-Kaup-Newell-Segur（AKNS）方程式 [12] と，後者は Hirota-Satsuma（HS）方程式 [13] とそれぞれ呼ばれている．

次節以降では，高次元浅水波方程式，特に高次元 KdV 方程式を紹介する．

2 高次元 KdV 方程式

この 30 年間に数学，物理学 及び 工学の様々な分野にわたり，無限次元可積分系の研究はめざましく発展し，成熟した段階に入りつつあると感じている．しかし一方で，我々の住んでいる世界が $(3+1)$ 次元であるにも関わらず，現在までに知られている高次元ソリトン方程式は，$(1+1)$ 次元のような 低次元の場合と比べると 明らかに**その数は少ない**．理由の一つには，低次元可積分系を**単純に**高次元に拡張してもその「可積分性」は保たれない事が挙げられる．但し可積分な高次元 KdV 方程式に関しては，他のソリトン方程式に比べると，知られているものは多い．一番有名なものはやはり Kadomtsev-Petviashvili（KP）方程式 [14]（$u = u(x,y,t)$）：

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x - \int_x^\infty u_{yy}(s,y,t)ds = 0 \tag{5}$$

であろう．$\partial_y u = 0$ とする次元還元により，KP 方程式 (5) は KdV 方程式 (1) となる．この他には Nizhnik-Novikov-Veselov（NNV）方程式 [15]（$u = u(x,y,t)$）：

$$u_t + \frac{1}{8}u_{xxx} + \underline{\frac{1}{8}u_{yyy}} - \frac{3}{8}\left(u\int_y^\infty u_x(x,s,t)ds\right)_x \underline{- \frac{3}{8}\left(u\int_x^\infty u_y(s,y,t)ds\right)_y} = 0 \tag{6}$$

[1] 本小論中では，添え字はその文字（変数）の偏微分を示す．

[2] この方程式の左辺は Benjamin-Bona-Mahoncy（BBM）方程式 [11] である．よって，FFCH 方程式 (2) は BBM 方程式の可積分変形をしたものだと思うこともできる．

[3] 但し，浅水波現象を直接に記述している訳でないことに注意したい．

が知られている．また，下線部の項がない場合も可積分方程式であり，Boiti-Leon-Manna-Ponminelli（BLMP）方程式と呼ばれている [16, 17]. $\partial_y = \partial_x$ とする次元還元により，NNV 方程式 (6)（及び BLMP 方程式）は KdV 方程式 (1) となる．

これらの高次元 KdV 方程式は既に有名であり，さまざまな書籍にも登場してくる．そこで本小論においては，まだまだマイナーな存在ではあるが，これからの研究が期待される Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式と呼ばれる高次元 KdV 方程式について詳しく紹介することにしたい．

3 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式

Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff（CBS）方程式（$u = u(x, z, t)$）：

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxz} + uu_z - \frac{1}{2}u_x \int_x^\infty u_z(s, z, t)ds = 0 \tag{7}$$

とは，F. Calogero が逆散乱法で解くことのできる KdV 型方程式の考察の過程 [18] で，O. I. Bogoyavlenskii が (non-isospectral) Lax 対の研究過程 [19] で，J. Schiff が自己双対 Yang-Mills（SDYM）方程式のある次元還元の研究過程 [20] でそれぞれ独立に導出した，高次元ソリトン方程式の一つである．$\partial_z = \partial_x$ とする次元還元により，CBS 方程式 (7) は KdV 方程式 (1) となる[4]．Lax 対を

$$\begin{cases} L = \partial_x^2 + u - \lambda, \\ T = \partial_x^2\partial_z + \frac{3}{4}u_z + \left(u - \frac{1}{2}\int_x^\infty u_z(s, z, t)ds\right)\partial_x + \partial_t \end{cases} \tag{8}$$

とすると，その両立条件 (Lax 方程式)：

$$[L, T] \equiv LT - TL = 0 \tag{9}$$

は CBS 方程式 (7) と等価となる．但し，$\lambda = \lambda(z, t)$ は isospectral 変数であり，

$$\lambda_t = \lambda\lambda_z \tag{10}$$

を満たす [21, 22, 23]．（付録 B を参照してほしい．）

ここで，

$$\Phi \equiv \frac{1}{4}\partial_x^2 + u - \frac{1}{2}u_x \int_x^\infty ds \tag{11}$$

[4] $\partial_z = \partial_t$ とする次元還元により，CBS 方程式 (7) は AKNS 方程式 (3) となる．よって，CBS 方程式 (7) を高次元 AKNS 方程式とみなすこともできる．

なる演算子を導入すると，CBS 方程式 (7) は

$$u_t + \Phi \circ u_z = 0 \tag{12}$$

と等価となる．また，CBS 方程式 (7) を含む CBS 階層は

$$u_t + \Phi^n \circ u_z = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

で与えられる [22, 24, 25].

次にソリトン解を導出する．従属変数変換（$\tau = \tau(x, z, t)$）：

$$u = 2(\ln \tau)_{xx} \tag{14}$$

により, CBS 方程式 (7) は trilinear 形式：

$$\mathcal{T}_x(\mathcal{T}_x^3\mathcal{T}_z^* + 8\mathcal{T}_x^2\mathcal{T}_x^*\mathcal{T}_z + 9\mathcal{T}_x\mathcal{T}_t)\tau \cdot \tau \cdot \tau = 0 \tag{15}$$

に書き直すことができる．ここで, $\mathcal{T}$-演算子とは, 広田の $\mathcal{D}$-演算子 [26]：

$$\mathcal{D}_x^n f(x) \cdot g(x) \equiv (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^n f(x_1)g(x_2)|_{x_1=x_2=x} \tag{16}$$

を拡張したもので,

$$\mathcal{T}_x^n f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \equiv (\partial_{x_1} + j\partial_{x_2} + j^2\partial_{x_3})^n f(x_1)g(x_2)h(x_3)|_{x_1=x_2=x_3=x} \tag{17}$$

と定義される [27]. 但し， $j = \exp(2\pi i/3)$ である．（付録 C を参照してほしい.）そして (15) 式を摂動計算すると, N ソリトン解の τ 関数 $\tau = \tau_N$ は

$$\tau_N = 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{{}_N C_n} A_{i_1 \cdots i_n} \exp(\eta_{i_1} + \cdots + \eta_{i_n}) \tag{18}$$

で与えられる [24]. 但し，

$$\begin{cases} \eta_j = p_j x + q_j z + r_j t + c_j & (\text{位相}), \\ r_j = -\dfrac{1}{4}p_j^2 q_j & (\text{分散関係}), \\ A_{jk} = \left(\dfrac{p_j - p_k}{p_j + p_k}\right)^2 & (\text{相互作用係数}), \\ A_{i_1 \cdots i_n} \equiv A_{i_1, i_2} \cdots A_{i_1, i_n} \cdots A_{i_{n-1}, i_n} \end{cases} \tag{19}$$

$(j = 1, 2, \cdots, N-1, N)$ とである．また, Wronskian 解は

$$\tau_N = \det \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_x^{N-1} f_1 & \cdots & \partial_x^{N-1} f_N \end{pmatrix} \tag{20}$$

である [24]. ここで,

$$f_j = \exp\left(\frac{\eta_j}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\eta_j}{2}\right) \tag{21}$$

$(j = 1, 2, \cdots, N-1, N)$ とする. 一方, CBS 方程式 (7) は, 補助変数 ζ を導入することで, 連立の bilinear 形式:

$$\begin{cases} (\mathcal{D}_z \mathcal{D}_x^3 + 2\mathcal{D}_z \mathcal{D}_\zeta + 6\mathcal{D}_t \mathcal{D}_x)\tau \cdot \tau = 0, \\ \\ \mathcal{D}_x(\mathcal{D}_x^3 - \mathcal{D}_\zeta)\tau \cdot \tau = 0 \end{cases} \tag{22}$$

とすることも可能である. trilinear 形式 (15) の場合の解との違いは

$$\eta_j = p_j x + q_j z + r_j t \underline{+ p^3 \zeta} + c_j \tag{23}$$

のみである [28].

次に CBS 方程式 (7) の 2 ソリトン解の特徴的な振る舞いをみてみよう. CBS 方程式 (7) の 2 ソリトン解は (18) 及び (19) より

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \eta_j = p_j x + q_j z - \dfrac{1}{4} p_j^2 q_j t + c_j \qquad (j = 1, 2), \\ \\ A_{12} = \left(\dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 \end{cases} \tag{25}$$

と表すことができる (図 1).

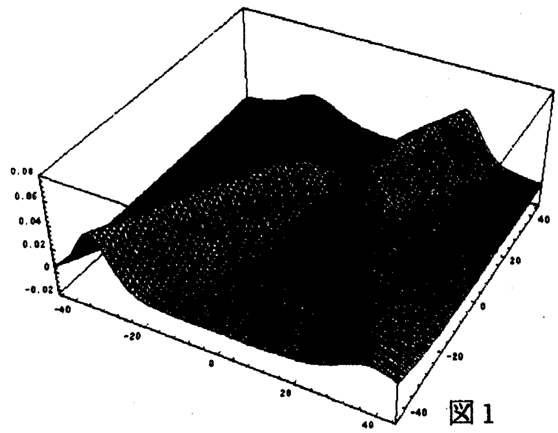

図 1

そして, $p_1 = p_2$ の時, V 字形のソリトン波が発生する (図 2, 3). この V 字の形のまま時間発展していく.

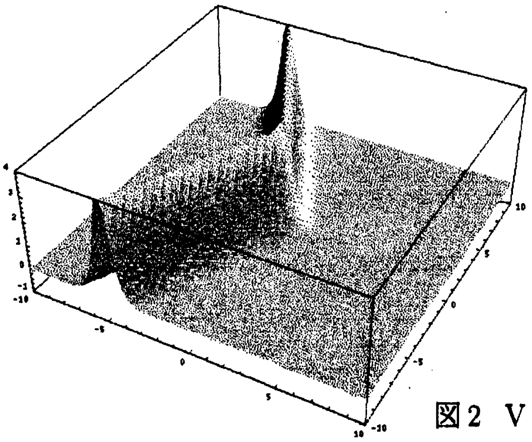

図2 V字ソリトン

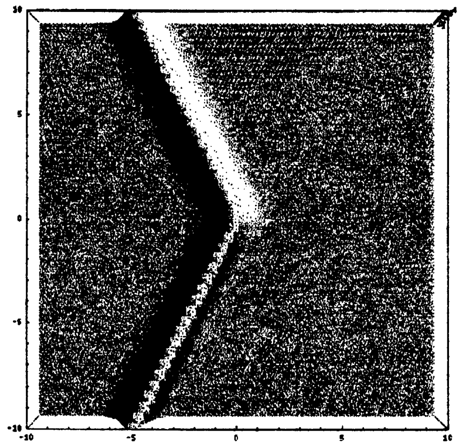

図3 真上から見たV字ソリトン

最後に注意しておきたいことがある．一部の論文で

$$u_t + u_{xxz} + uu_z - u_x \int_x^\infty u_z(s,z,t)ds = 0 \qquad (26)$$

という高次元 KdV 方程式が可積分であるということが主張されている[5]．しかし，方程式 (26) は Painlevé 判定法はパスしない．（付録 D を参照してほしい.）また，bilinear 形式に書き直すことはできるが，逐次的にソリトン解を構成するとは出来ない．よって，現段階で方程式 (26) が可積分であるかどうかは言及できない．

[5]CBS 方程式 (7) とは係数が一部異なる．これは非常に本質的な問題を含んでいるが，本小論ではこれ以上の説明はできない．

4 まとめ

本小論では，筆者が強く興味をもっている CBS 方程式 (7) について簡単に紹介した．詳しくは各文献を参考にしてほしい．研究集会の口頭発表時には，この CBS 方程式 (7) と 高次元 FFCH 方程式について考察を行ったが，本小論では割愛した．最後に著者のこの方面での（近い）将来の研究計画について触れたい．

ソリトン方程式を代表とする**無限次元可積分系**と呼ばれる方程式は，非線形波動論 や 非線形微分方程式論においては**特殊な**ものであるが，豊富な数理構造をもち，詳細に性質を調べることができる点で学問上重要な意味をもつ．特に，理論物理学のこれまでの歴史の中で「可積分模型のようなオモチャの模型」は重要な役割を果たしてきた．場の理論において，2 次元 sine-Gordon 模型 や Wess-Zumino-Witten 模型などがその代表例として挙げられる．このような可積分模型の研究の多くは，現実の物理的な問題（現象）への直接的な応用を目指すのではなく，むしろ**理論がもつ構造の数理的理解**を高めて，**一般的な教訓（知見）**を引き出すことを主目的としている (ように少なくとも筆者は思っている.)

佐藤理論 [29, 30, 31] によれば，KP 階層は高次元可積分系の大きなクラスと位置づけられる．例えば，KP 階層の適当な**次元還元**により KdV 階層が導出される．この KdV 階層とアファイン・リー代数との深い関係が解明されている．同様に本小論中でも紹介した CBS 階層 (13) がトロイダル・リー代数と深い関係があり [32, 33]，かつ KP 階層と同様に，高次元可積分系の大きなクラスである可能性が指摘されている．**non-isospectral Lax 対** と **トロイダル・リー代数**には本質的な関係がある．更により大きな高次元可積分系として，自己双対 Yang-Mills(SDYM) 階層が存在する．他方，KP 階層 や Toda 階層の「無分散極限」理論 と ツイスター理論との関係が詳しく調べられている [34, 35, 36]．そこで，CBS 階層の「無分散極限」理論の構築 及び それとツイスター理論との関係の解明を今後の研究テーマとして企図している．これら一連の研究を通して，無限次元可積分系がもつ**共通した性質** や **特徴**を探究する．またトロイダル・リー代数に対して，アファイン・リー代数のような豊富な代数構造を導くことで，数学の分野にも貢献したい．

謝辞

本研究集会で発表する機会を与えて下さいました世話人の田中 光宏先生（岐阜大・工）に御礼を申し上げます．

本研究は，**平成16年度財団法人富山第一銀行助成** 及び **科研費（若手B: 15740242）**の補助により進められたものであることを附記します．

付録

付録 A. Camassa-Holm 型非線形偏微分方程式

α, β, γ, κを任意の定数とする．次のようなの Camassa-Holm 型非線形偏微分方程式（$u = u(x, t)$）：

$$uu_{xxx} + \alpha u_x u_{xx} - \beta(\alpha + 1)uu_x = u_t - \gamma u_{xxt} + 2\kappa u_x \tag{27}$$

には，以下のような有名なものが知られている[6]：

- $\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = 1$ の場合： FFCH 方程式 (2)
- $\alpha = 2,\ \beta = 4,\ \gamma = 1$ の場合： Degasperis-Procesi 方程式 [37, 38]
- $\alpha = 3,\ \beta = \gamma = 1,\ \kappa = \dfrac{1}{2}$ の場合： Fornberg-Whitham 方程式 [39, 40]
- $\alpha = 3,\ \beta = -1,\ \gamma = \kappa = 0$ の場合： Rosenau-Hyman 方程式 [41]

付録 B. Non-isospectral Lax 対

Non-isospectral Lax 対について紹介する．

波動関数を $\psi = \psi(x, z, t)$ とする線形問題（$\lambda = \lambda(z, t)$）[42, 43]：

$$\begin{cases} L\psi = \lambda\psi, \\ -\psi_t = \tilde{T}\psi \equiv \widetilde{\mathbf{OP}}\partial_z + \mathbf{\Delta} \end{cases} \tag{28}$$

を考える．但し，$\widetilde{\mathbf{OP}}$ 及び $\mathbf{\Delta}$ は ∂_z を含まない微分演算子とする．このとき，Lax 方程式 (9) は

$$[L, \tilde{T} + \partial_t]\psi = (\lambda_t - \lambda_z\widetilde{\mathbf{OP}})\psi \tag{29}$$

となる．ここで例えば，$L = L_{\mathrm{KdV}}$ とすると，T 演算子は

$$T = \tilde{T} + \partial_t = \widetilde{\mathbf{OP}}\partial_z + \mathbf{\Delta} + \partial_t = \partial_z L_{\mathrm{KdV}} + T' + \partial_t \tag{30}$$

とできる．何故なら，T' 演算子中に ∂_z が含まれることがないためである．よって，

$$\widetilde{\mathbf{OP}} = L_{\mathrm{KdV}} = \partial_x^2 + u = \lambda \tag{31}$$

[6] 方程式 (27) の左辺は $(u\partial_x + \alpha u_x)(u_{xx} - \beta u)$ と書き直すこともできる．

なので，Lax 方程式 (29) は

$$[L, \tilde{T} + \partial_t]\psi = (\lambda_t - \lambda\lambda_z)\psi \tag{32}$$

と書ける．故に，

$$\lambda_t = \lambda\lambda_z \tag{33}$$

の時に，Lax 方程式 (32) は非線形可積分方程式と等価となり，今の場合には CBS 方程式 (7) となる．

付録 C. trilinear-演算子

広田の $\mathcal{D}$-演算子の再定義 と その拡張である $\mathcal{T}$-演算子を紹介する．

ゲージ変換: $\tau \to \exp(\eta)\tau \quad (\eta = px + \omega t)$ に対して従属変数が <u>不変</u> であると要請すると，

$$\sum_{k=0}^{N} C_k(\partial^{\,k}\exp(\eta)f)(\partial^{\,N-k}\exp(\eta)g) = \exp(2\eta)\sum_{k=0}^{N} C_k(\partial^{\,k}f)(\partial^{\,N-k}g)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{D} = \partial_{x_1} + \exp\left(\frac{2i\pi}{2}\right)\partial_{x_2} = \partial_{x_1} - \partial_{x_2} \tag{34}$$

となる．このように $\mathcal{D}$-演算子を再定義できる．この定義の自然な拡張として，

$$\sum_{k+l+m=N}^{N} C_{klm}\Big(\partial^{\,k}\exp(\eta)f\Big)\Big(\partial^{\,l}\exp(\eta)g\Big)(\partial^{\,m}\exp(\eta)h)$$

$$= \exp(3\eta)\sum_{k+l+m=N}^{N} C_{klm}(\partial^{\,k}f)(\partial^{\,l}g)(\partial^{\,m}h)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{T} = \partial_{x_1} + \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)\partial_{x_2} + \exp\left(\dfrac{4i\pi}{3}\right)\partial_{x_3} = \partial_{x_1} + j\partial_{x_2} + j^{\,2}\partial_{x_3}, \\ \\ \mathcal{T}^* = \partial_{x_1} + j^{\,2}\partial_{x_2} + j\partial_{x_3} \end{cases} \tag{35}$$

と $\mathcal{T}$-演算子を定義できる．また, multilinear-演算子も同様に定義できる [27].

付録 D. Painlevé 判定法 と 浅水波型方程式

α, β を任意の定数とする．次のような 3 階の非線形偏微分方程式 ($u = u(x, z, t)$):

$$u_t + u_{xxz} + \alpha u u_z - \beta u_x \int_x^{\infty} u_z(s, z, t)ds = 0 \tag{36}$$

を考える． この方程式 (36) が，Painlevé 判定法の一つである Weiss-Taibor-Carnevell 法 [44, 45, 46] をパスする条件を求めると，簡単な計算により

- $\partial_z = \partial_x \neq \partial_t$ $\Rightarrow$ KdV 方程式 (1)
- $\partial_z = \partial_t \neq \partial_x$ かつ $\alpha = 2\beta$ $\Rightarrow$ AKNS 方程式 (3)
- $\partial_z = \partial_t \neq \partial_x$ かつ $\alpha = \beta$ $\Rightarrow$ HS 方程式 (4)
- $\partial_z \neq \partial_x \neq \partial_t$ かつ $\alpha = 2\beta$ $\Rightarrow$ CBS 方程式 (7)

であることが分かる [47]. よって,

$$\partial_z \neq \partial_x \neq \partial_t \text{ かつ } \alpha = \beta$$

の場合には, Painlevé 判定法（Weiss-Taibor-Carnevell 法）をパスしない.

参考文献

[1] V. E. Zakharov（編）: *What Is Integrability?*, Springer-Verlag.

[2] 川原 琢治： ソリトンからカオスへ, 朝倉書店.

[3] 戸田 盛和： 波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店.

[4] 和達 三樹： 非線形波動, 岩波書店.

[5] 戸田 盛和： 非線形波動とソリトン, 日本評論社.

[6] D. J. Korteweg and G. de Vries： *Phil. Mag.*, **39**, 4221 (1895).

[7] A. Fokas and B. Fuchssteiner： *Physica* D, **4**, 47 (1981).

[8] R. Camassa and D. Holm： *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1661 (1993).

[9] R. S. Johnson： *J. Fluid Mech.* A, **455**, 63 (2002).

[10] R. S. Johnson： *Fluid Dynamics Research.*, **33**, 97 (2003).

[11] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahoney： *Phil. Trans. R. Soc.* A, **227**, 47 (1972).

[12] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur： *Studies in Appl. Math.*, **53**, 249 (1974).

[13] R. Hirota and J. Satsuma： *J. Phys. Soc. Japan*, **40**, 611 (1976).

[14] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili： *Sov. Phys. Doklady*, **15**, 539 (1970).

[15] S. P. Novikov and A. P. Veselov： *Physica* D, **18**, 267 (1986).

[16] M Boiti, J J -P Leon, M Manna and F Pempinelli： *Inverse Problems*, **2**, 271 (1986).

[17] B. G. Konopelchenko： *Solitons in Multidimensions*, World Scientific.

[18] F. Calogero： *Lett. Nuovo Cim.*, **14**, 443 (1975).

[19] O. I. Bogoyavlenskii： *Math. USSR-Izv.*, **34**, 245 (1990).

[20] J. Schiff： *NATO ASI* Ser. B, **278** (Plenum, New-York), 393 (1992).

[21] P. A. Clarkson, P. R. Gordoa and A. Pickering： *Inverse Problems*, **13**, 1463 (1997).

[22] P. R. Gordoa and A. Pickering： *J. Math. Phys.*, **40**, 5749 (1999).

[23] P. G. Estévez： *Inverse Problems*, **17**, 1043 (2001).

[24] S-J Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama： *J. Phys.* A, **31**, 3337 (1998).

[25] K. Toda, S.-J. Yu and T. Fukuyama： *Rep. Math. Phys.*, **44**, 247 (1999).

[26] 広田 良吾： 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店.

[27] B. Grammaticos, A. Ramani and J. Hietarinta： *Phys. Lett.* A, **190**, 65 (1994).

[28] T. Ikeda and K. Takasaki： *International Mathematics Research Notices*, **7**, 329 (2001).

[29] 佐藤 幹夫（述）, 野海 正俊（記）： ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学数学講究録 no.18.

[30] 梅田 亨（記）： 佐藤幹夫講義録, 数理解析レクチャー・ノート.

[31] 三輪 哲二, 神保 道夫, 伊達 悦朗： ソリトンの数理, 岩波書店.

[32] Y. Biling： *J. Algebra*, **217**, 40(1999).

[33] K. Iohara, Y. Saito and M. Wakimoto： *Phys. Lett.* A, **254**, 37 (1999).

[34] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse： *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory*, Oxford.

[35] 高崎 金久： 可積分系の世界, 共立出版.

[36] 高崎 金久： ツイスターの世界, 共立出版.

[37] A. Degasperis and M. Procesi : *Asymptotic Integrability, in Symmetry and Perturbation Theory*, 23 (World Scientific, 1999).

[38] A. Degasperis, D.D. Holm and A. N. W. Hone : *Theor. and Math. Phys.*, **133**, 1461 (2002).

[39] G. B. Whitham : *Proc. R. Soc. Lond.* A, **299**, 6 (1967).

[40] B. Fornberg and G. B. Whitham : *Phil. Trans. R. Soc.* A, **289**, 373 (1978).

[41] P. Rosenau and J. M. Hyman : *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 564 (1993).

[42] K. Toda : *PRHEP-unesp2002/038*, 1 (2003).

[43] T. Kobayash and K. Toda: *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **V.E88-A**, 2548 (2005).

[44] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale : *J. Math. Phys.*, **24**, 522 (1983).

[45] A. Ramani, B. Grammaticos and T. Bountis : *Phys. Rep.*, **180**, 159 (1989).

[46] 戸田 晃一: 慶應義塾大学 日吉紀要 自然科学, **第32巻**, 1 (2002).

[47] 小林 匡, 戸田 晃一, 山下 淳: 慶應義塾大学 日吉紀要 自然科学, 掲載予定 (2006).